

# MEZCLA DE CUATRO ONDAS EN MICROCAVIDADES SEMIMAGNÉTICAS SEMICONDUCTORAS

D. Pereda Cubián, J. L. Arce Diego, C. Iturregui Obregón, F. Fanjul Vélez

Departamento TEISA  
Universidad de Cantabria  
jlarce@teisa.unican.es

R. Frey

Institut d'Optique  
Université Paris-Sud  
robert.frey@iota.u-psud.fr

**Abstract**—Four-wave mixing is a non-linear process that can be produced into a semimagnetic semiconductor microcavity under the appropriate conditions of frequency and input angles of the optical pumping and the input signal. The analysis of the microcavity by means of an extended *Yeh* matrix demonstrates the generation of the four-wave mixing into this device, and provides a good agreement with the experimental measurements previously obtained. This process produces the generation of a new wave, called conjugated, and a huge amplification of the input signal in the reflection configuration, allowing to use this device in wavelength conversion and optical amplification.

## I. INTRODUCCIÓN

La mezcla de cuatro ondas es un fenómeno en el que dos señales de diferente longitud de onda, denominadas señal de bombeo (*pumping*,  $P$ ) y señal de entrada (*input signal*,  $S$ ), se introducen en un dispositivo de tal modo que debido al bombeo, de alta potencia, se origina un efecto no lineal en el interior del dispositivo, con lo que se produce la aparición de una nueva señal, denominada señal conjugada (*conjugated*,  $C$ ), de diferente longitud de onda respecto al bombeo y a la señal de entrada [1].

Este efecto no lineal puede originarse en muchos medios diferentes, como gases de tres niveles y estructuras semiconductoras. Una Microcavidad Semimagnética Semiconductora (*Semiconductor Semimagnetic Microcavities*, *SSM*) es una microcavidad *Fabry-Perot* compuesta por material semiconductor, dopada con algún elemento magnético y con un Pozo Cuántico (*Quantum Well*, *QW*) situado en su centro [2]. En el *QW* el dopado es más pequeño para dar lugar a la reducción de la anchura de banda prohibida, con lo que aparecen importantes efectos en la *SSM*. Dentro de una microcavidad uno de sus componentes se ha sustituido por iones magnéticos. La mayoría son semiconductores del tipo *II-VI*, donde el elemento del grupo *II* ha sido reemplazado por un ión magnético, habitualmente  $Mn^{2+}$ . El material semiconductor empleado en la cavidad es  $Cd_{1-x}Mn_xTe$ , donde el valor del parámetro  $x$  determina la anchura de banda prohibida.

La longitud de la microcavidad es  $\lambda/2$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la transición excitónica producida en el *QW*, con el objeto de ajustar la resonancia de la cavidad a la

resonancia de la emisión excitónica, con lo que se produce un acoplo fuerte entre ellas, la interacción excitónica. Este dispositivo ya ha sido descrito bajo el influjo de campos magnéticos externos [3] y en un régimen de operación no lineal, efecto magneto-óptico fotoinducido [4], en el que el campo magnético se sustituye por bombeo óptico, de tal forma que se originan elevadas rotaciones de polarización y desplazamientos de fase. A continuación se estudiará este dispositivo bajo las condiciones de mezcla de cuatro ondas.

Con las condiciones adecuadas de frecuencia y ángulo de entrada se produce el efecto de mezcla y una nueva onda se genera. Además, este no es el único efecto no lineal producido, ya que para ciertos valores de bombeo puede ser también originada una enorme amplificación de la señal de entrada. Estos efectos transforman las *SSMs* en dispositivos muy interesantes tanto para la conversión de longitud de onda como para la amplificación óptica.

Aunque se han llevado a cabo medidas experimentales que prueban la existencia de este fenómeno en *SSM* [5]. Sin embargo, hasta donde conocemos, ningún análisis teórico de estos dispositivos para mezcla de cuatro ondas ha sido desarrollado con éxito. En este trabajo, se presenta un estudio del citado dispositivo bajo las condiciones de mezcla de cuatro ondas. El efecto no lineal se modela por medio de una matriz de *Yeh* extendida con objeto de considerar las diferentes interacciones entre las tres señales que tienen lugar en la *SSM*.

## II. MATRIZ DE YEH EXTENDIDA PARA EL ANÁLISIS DE LA MEZCLA DE CUATRO ONDAS EN SSM

La mezcla de cuatro ondas en una *SSM* se analizará utilizando la matriz de *Yeh* [6]. Este método matricial se ha elegido debido a su sencillez a la hora de analizar estructuras con múltiples elementos en serie, con respecto a otros métodos matriciales, como la matriz de *Scattering*. Se han de considerar tres señales diferentes en el análisis, con lo que el orden de esta matriz será extendido para tener en cuenta todas estas señales y sus posibles interacciones.

Cada una de las partes de la *SSM*, que se muestra en la Figura 1, se puede analizar mediante su correspondiente matriz de *Yeh*. Como esta matriz permite analizar sistemas en serie, la matriz completa del sistema se obtendrá mediante el producto de las diferentes matrices en el orden correspondiente. Este

dispositivo, para su estudio, se puede dividir en siete regiones diferentes, de la siguiente manera:

- 1) Primer espejo de *Bragg* ( $Y_1$ )
- 2) Propagación en la primera parte de la cavidad ( $Y_2$ )
- 3) Interfaz primera parte de la cavidad – *QW* ( $Y_3$ )
- 4) Propagación en el *QW* ( $Y_4$ )
- 5) Interfaz *QW* – segunda parte de la cavidad ( $Y_5$ )
- 6) Propagación en la segunda parte de la cavidad ( $Y_6$ )
- 7) Segundo espejo de *Bragg* ( $Y_7$ )

Por lo tanto, la matriz completa que caracteriza a la *SSM* se obtendrá mediante la siguiente expresión:

$$Y = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \cdot Y_4 \cdot Y_5 \cdot Y_6 \cdot Y_7 \quad (1)$$

En la mezcla de cuatro ondas, aparecen en la *SSM* tres señales diferentes, con tres longitudes de onda, con lo que el orden de la matriz que caracteriza adecuadamente el sistema tiene que incrementarse. De este modo, no sólo pueden analizarse estas tres señales simultáneamente, sino también sus influencias, las mezclas producidas en el caso no lineal. La matriz de la *SSM* será una supermatriz 3x3, definida en la Ecuación 2, en la cual cada elemento será a su vez una matriz de *Yeh* 2x2, es decir, algebraicamente constituye una matriz 6x6.

$$\begin{bmatrix} E_{Pright} \\ E_{Sright} \\ E_{Cright}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{PP} & Y_{PS} & Y_{PC} \\ Y_{SP} & Y_{SS} & Y_{SC} \\ Y_{CP} & Y_{CS} & Y_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{Pleft} \\ E_{Sleft} \\ E_{Cleft}^* \end{bmatrix} \quad (2)$$

### III. FRECUENCIAS Y ÁNGULOS DE LAS SEÑALES

En la mezcla de cuatro ondas aparecen tres señales diferentes denominadas bombeo ( $\omega_p$ ), señal de entrada ( $\omega_s$ ) y conjugada ( $\omega_c$ ). Estas tres señales quedarán definidas por seis parámetros:

- Tres frecuencias,  $\omega_p, \omega_s$  y  $\omega_c$
- Tres ángulos,  $\theta_p, \theta_s$  y  $\theta_c$

La relación entre las frecuencias de estas tres señales viene dada por la siguiente expresión, que recibe el nombre de ley de conservación de la energía y está dada por la ecuación siguiente:

$$2 \cdot \omega_p - \omega_s - \omega_c = 0 \quad (3)$$

Esta relación puede expresarse también en términos de la constante de propagación. En este caso, se conoce como la ley de conservación de la fase:

$$2 \cdot \omega_p \cdot \sin(\theta_p) - \omega_s \cdot \sin(\theta_s) - \omega_c \cdot \sin(\theta_c) = 0 \quad (4)$$

El sistema debe mantener en el proceso de mezcla de cuatro ondas estas condiciones, y que las tres señales en el *QW* sean ondas de polaritón, es decir, se verifique la siguiente relación:

$$\omega_i = \frac{1}{2} \cdot (\omega_{exc} + \omega_{ci}) - \frac{1}{2} \cdot [(\omega_{exc} - \omega_{ci})^2 + \Omega^2]^{1/2} \quad (5)$$

donde:

- $\omega_i$              $\omega_p, \omega_s, \omega_c$
- $\omega_{exc}$         Frecuencia de resonancia excitónica
- $\Omega$             Acoplo excitón – cavidad

El acoplo entre el excitón y la cavidad viene dado por la separación entre los picos del espectro en reflexión producto del *Rabi splitting* [4].

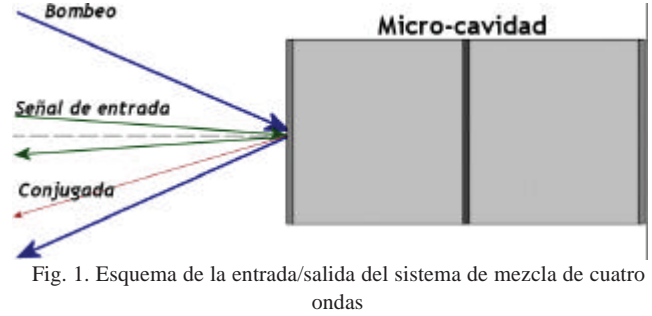


Fig. 1. Esquema de la entrada/salida del sistema de mezcla de cuatro ondas

La condición de resonancia de la cavidad será:

$$\omega_{Ci}^2 = \omega_{exc}^2 + \frac{\omega_i^2}{n^2} \cdot \sin^2(\theta_i) \quad (6)$$

Una vez tenidas en cuenta las leyes de conservación de la energía y de la fase, se calculan los valores de las diferentes frecuencias y ángulos mediante un cálculo basado en la utilización de métodos numéricos.

### IV. MATRICES DE *YEH* EXTENDIDAS DE LOS ELEMENTOS DE LA *SSM*

A modo de ejemplo, para el cálculo de la matriz de *Yeh* extendida del dispositivo, se muestra la obtención de la matriz de la primera parte de la microcavidad. Este sistema es no absorbente, por lo que sólo se produce propagación a través del medio. En esta región, las tres señales que aparecen en el dispositivo se analizarán del mismo modo. Si las constantes de propagación de las diferentes señales son  $k_p, k_s$  y  $k_c$ ,  $l_1$  es la longitud de la primera parte de la cavidad, y las señales toman valores de  $\theta_p, \theta_s$  y  $\theta_c$ , los elementos de las matrices serán:

$$\begin{aligned} y_{11}^{(2)} &= e^{-i \cdot k_p \cdot l_1 \cdot \cos(\theta_p)} & y_{33}^{(2)} &= e^{i \cdot k_s \cdot l_1 \cdot \cos(\theta_s)} & y_{55}^{(2)} &= e^{i \cdot k_c \cdot l_1 \cdot \cos(\theta_c)} \\ y_{22}^{(2)} &= e^{i \cdot k_p \cdot l_1 \cdot \cos(\theta_p)} & y_{44}^{(2)} &= e^{-i \cdot k_s \cdot l_1 \cdot \cos(\theta_s)} & y_{66}^{(2)} &= e^{-i \cdot k_c \cdot l_1 \cdot \cos(\theta_c)} \end{aligned} \quad (7)$$

Las constantes de propagación de las diferentes ondas vienen dadas por:

$$k_p^2 = \left( \frac{\omega_p}{c} \right)^2 \cdot n \quad k_s^2 = \left( \frac{\omega_s}{c} \right)^2 \cdot n \quad k_c^2 = \left( \frac{\omega_c}{c} \right)^2 \cdot n \quad (8)$$

El intercambio de energía entre las diferentes señales, el proceso de mezcla de cuatro ondas, tiene lugar en el *QW*. Por tanto, la supermatriz 3x3 que caracteriza esta región, ver Ecuación 2, ya no es diagonal para que exista acoplo entre las diferentes señales que intervienen en dicho efecto no lineal. La propagación a lo largo del *QW* viene dada por constantes de propagación complejas que consideran la absorción del medio. Los coeficientes de esta matriz están determinados por la longitud del *QW*, sus constantes de propagación y algunos parámetros que tienen en cuenta los efectos no lineales que se producen en su interior. Los coeficientes más importantes son los que interrelacionan las señales de entrada (S) y conjugada (C) [7].

## V. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

El estudio se ha realizado utilizando la aplicación *Mathematica®* y se ha estudiado la evolución de la ganancia de las señales de entrada y conjugada, en función de dos parámetros de entrada proporcionales a la no linealidad,  $\rho_{NC}$  y  $\rho_{SAT}$ . Para el cálculo se toman los parámetros de la Tabla 1.

TABLA 1

PARÁMETROS DE LA MICROCAVIDAD

Parámetros de energía	Parámetros cuánticos	Parámetros de los espejos de Bragg
$E_p = 1.60583$	$E_{exc} = 1.613$	$R_1 = 0.386$
$E_s = 1.60425$	$\gamma = 0.005$	$R_2 = 0.97$
$\theta_p = 10.3197^\circ$	$\Gamma = 0.0024$	$A_1 = 0.113/\gamma$
$\theta_s = 0^\circ$	$\phi_{gw} = 0.226$	$A_2 = 0.300/\gamma$
$\theta_c = 20.9541$		

Las expresiones para las ganancias, en reflexión y transmisión, para la señal de entrada y la señal conjugada se calculan a partir de los elementos de la matriz de *Yeh* extendida,  $y_{ij}$ , que caracterizan la *SSM*. Estas ganancias son:

$$G_S^{RX} = \frac{y_{55} \cdot y_{43} - y_{53} \cdot y_{45}}{y_{33} \cdot y_{55} - y_{35} \cdot y_{53}}, \quad G_S^{TX} = \frac{y_{55}}{y_{33} \cdot y_{55} - y_{35} \cdot y_{53}} \quad (9)$$

$$G_C^{RX} = \frac{y_{63} \cdot y_{55} - y_{65} \cdot y_{53}}{y_{33} \cdot y_{55} - y_{35} \cdot y_{53}}, \quad G_C^{TX} = \frac{-y_{53}}{y_{33} \cdot y_{55} - y_{35} \cdot y_{53}}$$

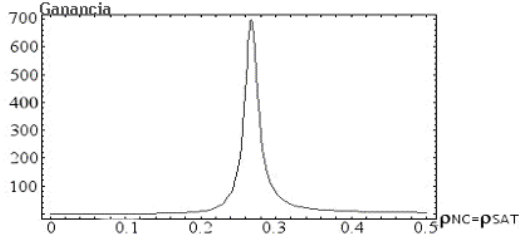


Fig. 2. Ganancia de la señal en la configuración en reflexión

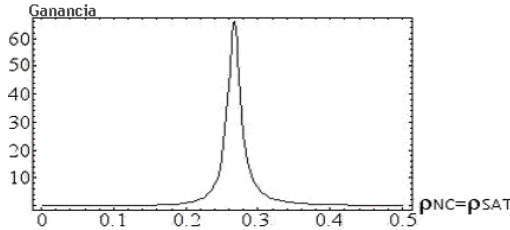


Fig. 3. Ganancia de la señal conjugada en la configuración en reflexión

Se ha supuesto que los parámetros de entrada no lineales,  $\rho_{NC}$  y  $\rho_{SAT}$ , toman simultáneamente el mismo valor. Se puede observar que se obtiene una enorme ganancia tanto para la señal de entrada como para la señal conjugada cuando el valor de  $\rho_{NC}$  y  $\rho_{SAT}$  se sitúa alrededor de 0.27. La ganancia de la señal de entrada puede alcanzar valores de incluso 700, en la configuración en reflexión, como se muestra en la Figura 2, mucho mayores que en la configuración en transmisión, con valores alrededor de 3, lo cual hace que el dispositivo resulte muy interesante para amplificación óptica.

Para la señal conjugada, Figura 3, las ganancias son menores, pero relativamente muy altas si se tiene en cuenta la no existencia de entrada. No sólo se ha creado una nueva señal, sino que también ha sido amplificada en relación con la señal de entrada. Por lo tanto, este dispositivo podría tener aplicaciones no sólo como amplificador óptico de señal, sino también como conversor de longitud de onda.

En ausencia de bombeo, se pueden apreciar en la Figura 4 los dos modos del polaritón, el superior (*Upper*, *U*) y el inferior (*Lower*, *L*). Cuando el bombeo aumenta, aparece alrededor del modo del polaritón *L* una elevada ganancia. Estos resultados coinciden con los obtenidos experimentalmente [3, 5].

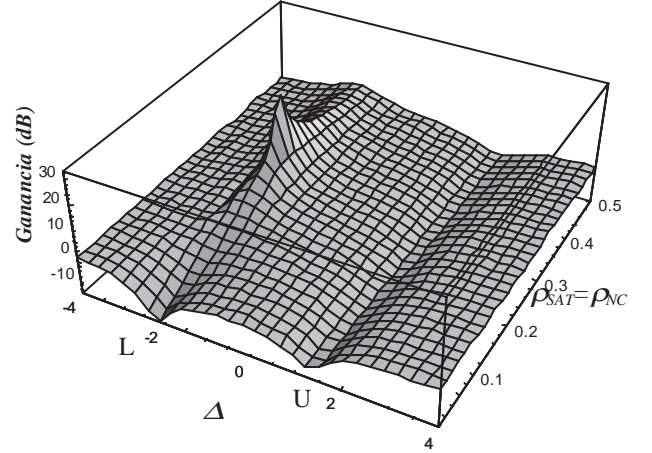


Fig. 4. Ganancia de la señal de entrada en función de los parámetros de entrada no lineales  $\rho_{NC}$  y  $\rho_{SAT}$  y de la frecuencia normalizada  $\Delta$ .

## VI. CONCLUSIONES

Se ha analizado la mezcla de cuatro ondas en una Microcavidad Semimagnética Semiconductora mediante el método de la matriz de *Yeh* extendida. Como resultado de la introducción de dos señales en la *SSM* y de su interacción con el pozo cuántico situado en el centro de la microcavidad, se genera una nueva onda denominada conjugada, cuya frecuencia viene dada por la ley de la conservación de la energía. Esta generación se ha puesto de manifiesto y al mismo tiempo se ha demostrado que, bajo ciertas condiciones del bombeo a la entrada que provoca la no linealidad en la *SSM*, la señal de entrada es fuertemente amplificada, obteniéndose enormes ganancias. Esta ganancia permite utilizar este dispositivo no sólo como conversor de longitud de onda debido al proceso de mezcla de cuatro ondas y la consecuente generación de la onda conjugada, sino también como amplificador óptico de gran ganancia.

## REFERENCIAS

- [1] R.W. Boyd, "Nonlinear Optics". Academic Press, 1992.
- [2] V.Savona, L.C.Andreani, P.Schwendimann, A.Quattropani, "Quantum well exciton in semiconductor microcavities: unified treatment of weak and strong coupling regimes" *Solid State Communications* 93(9), 1995.
- [3] M.Haddad, R.Andre, R.Frey, C.Flytzanis, "Enhanced Faraday rotation in an asymmetric semiconductor microcavity". *Solid State Communications* 111, 1999.
- [4] D.Pereda Cubián, M.Haddad, R.André, R.Frey, G.Roosen, J.L.Arce Diego, C.Flytzanis, "Photo-induced magneto-optic Kerr effects in asymmetric semiconductor microcavities". *Physical Review B*, 67, 045308, pp.1-8, January 2003.
- [5] P.G.Savvidis, J.J.Baumberg, R.M.Stevenson, M.S.Skolnick, D.M. Whittaker, J.S.Roberts, "Angle-Resonant Stimulated Polariton Amplifier". *Physical Review Letters* 84, pp. 1547-1550, 2000.
- [6] P.Yeh, "Optical waves in layered media", Wiley & sons. 1988.
- [7] D.Pereda Cubián, *Estudio y caracterización de dispositivos fotónicos basados en fenómenos magneto-ópticos y foto-inducidos*, Doctoral Thesis (in Spanish). University of Cantabria, December 2003.

